

Navn:

Fødselsdato:

Skole:

Tårnby Gymnasium

Fag:

Studieretningsprojekt, Samlet vurd. (6647--

Gym bekend,)

Dato for prøveafleggelse: 26-03-2021

Det skrå kast med luftmodstand

Studieretningsprojekt

Elev:

Vejledere:

Opgaveformulering

- Giv en introduktion til differentialligninger, herunder 2. ordens differentialligninger. Gør rede for Eulers metode og numerisk integration.
- Gør desuden rede for det skrå kast med og uden luftmodstand.
- Der ønskes analyser af film udført af det skrå kast med forskellige objekter. Frembring ud fra modellen, grafer for bevægelserne vha. numeriske løsninger. Sammenlign bevægelserne med modellens forudsigelser.
- Vurder og diskuter din models validitet.

Resumé

Dette studieretningsprojekt beskæftiger sig med det skrå kast med luftmodstand. Opgaven introducerer kort til differentialligninger, og går derefter mere i dybden med differentialligninger af 2. orden, hvor beviset for fuldstændige løsninger til lineære andenordens differentialligninger gennemgås. Derudover vil opgaven redegøre for numeriske løsningsmetoder som Eulers metode og Runge Kutta numerisk integration. Herefter blev der redegjort for det skrå kast uden og med luftmodstand, hvor der blandt andet blev gjort brug af vektorfunktioner til at forklare teorien for det skrå kast. Derefter er der lavet videoanalyse på to forsøg, hvor der er blevet kastet to bolde af forskellige masse. Vi har dertil skulle bruge vores nye viden om den numeriske løsningsmetode *Eulers metode* til at beregne os frem til en tilnærmet løsningskurve for boldenes bevægelse gennem luften, hvor luftmodstanden regnes med. Til sidst sammenligner opgaven grafen for de forskellige bevægelser, og afslutter med at sammenligne en graf i xy-planen for modellens forudsigelse af boldenes bevægelse med boldenes aktuelle bevægelse, som vi har fundet frem til gennem videoanalysen. Det viste sig at være en ret præcis metode, da vi tog de rette forbehold.

Indholdsfortegnelse

Indledning	3
Introduktion til differentialligninger, herunder 2. ordens differentialligninger, samt redegørelse af Eulers metode og numerisk integration.	4
<i>Differentialligninger af anden orden</i>	<i>6</i>
<i>Bevis for sætning 7</i>	<i>8</i>
<i>Eulers metode</i>	<i>10</i>
<i>Numerisk integration (Runge Kutta metoden)</i>	<i>11</i>
Gør rede for det skrå kast med og uden luftmodstand.....	12
<i>Det skrå kast uden luftmodstand</i>	<i>12</i>
<i>Det skrå kast med luftmodstand</i>	<i>16</i>
Videoanalyse af film af det skrå kast med forskellige objekter. Opstilling af tilnærmet løsningskurve ved brug af numeriske løsninger samt sammenligning af løsningskurve og observationer.	18
Vurdering og diskussion af modellens validitet.....	23
Konklusion	24
Litteraturliste	25

Indledning

Denne opgave beskæftiger sig med det skrå kast med luftmodstand. Opgaven giver en introduktion til differentialligninger og arbejder analytisk i matematik ved at bevise fuldstændige løsninger til lineære andenordens differentialligninger. Derudover bliver der redegjort for Eulers metode, samt Runge Kutta numerisk integration. Her er vejes også fordelene ved de forskellige metoder. Derudover redegør opgaven for det skrå kast med og uden luftmodstand, samt opstiller en teoribaseret model for det skrå kast med og uden luftmodstand. I fysik bliver der arbejdet eksperimentelt, da der bliver filmet videoer af skrå kast for en tennisbold og en gul plastikbold, samt foretaget videoanalyse af bevægelsen for de skrå kast. Fysikken og matematikken arbejder sammen om at teste, om man deduktivt kan bruge teorien om numeriske løsningsmetoder og bruge den på et konkret eksempel i virkeligheden. I denne opgave bliver Eulers metode brugt til at kunne forudsige hastigheden samt positionen i hhv. x- og y-retningen ved brug af nogle randbetingelser. Derefter vil modellens forudsigelser blive sat op mod observationerne af kastenes bevægelse. Til sidst bliver der diskuteret om, hvorvidt Eulers metode er den bedste metode at bruge til at forudsige boldenes bevægelse i et skråt kast med luftmodstand. Her er der derfor blevet arbejdet empirisk med modelvurdering.

Introduktion til differentialligninger, herunder 2. ordens differentialligninger, samt redegørelse af Eulers metode og numerisk integration.

En differentialligning er en ligning, hvor at den ubekendte ikke er et tal, men derimod en funktion. Samtidig skal der også indgå en eller flere af funktionens afledede funktioner. Man bruger differentialligninger til at beskrive fænomener som blandt andet populationsvækst i biologi, hvor man ikke har mulighed for direkte at afgøre, hvilken funktion $f(x)$, der bedst beskriver fænomenet, ud fra observationer. Nogle gange kan man kun sige noget om, f.eks. hvilken sammenhæng, der er mellem $f(x)$ og $f'(x)$ ¹. En differentialligning kunne se sådan her ud: $f'(x) = 1,10 \cdot f(x)$ eller $f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = x^2$.

Til at give et bedre overblik over, hvordan differentialligninger fungerer, bruger vi et eksempel: Vi tager udgangspunkt i en mikrobiolog, som studerer bakteriepopulation. Det kan for mikrobiologen være problematisk at afgøre, hvilken model $f(t)$ der bedst beskriver størrelsen, når man kun har populationens størrelse til forskellige tidspunkter t . Derimod kan mikrobiologen forsøge at udlede en sammenhæng mellem populationens størrelse $f(t)$ til tiden t og populationsvæksten $f'(t)$ til samme tidspunkt t ².

Funktionen $f(t)$ og dens afledede $f'(t)$ er altså til hvilket som helst tidspunkt proportionale med samme proportionalitetskonstant k :

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

Nu er der opstillet en differentialligning, som indirekte beskriver bakteriepopulationens størrelse $f(t)$. Hvis mikrobiologen antager at populationens størrelse er 11.500 til $t = 0$ og formoder, at proportionalitetskonstanten $k = 0,02$, har vi, at:

$$f(0) = 11.500 \quad \text{og} \quad f'(t) = 0,02 \cdot f(t)$$

¹ Carstensen m.fl. (2019), s.148

² Carstensen m.fl. (2019), s.148

Ligningen $f'(t) = k \cdot f(t)$ kaldes for *begyndelsesbetingelsen* og de to ligninger ovenfor kaldes for et *begyndelsesværdiproblem*. Som udgangspunkt, kan vi sige, hvilken funktion, som løser problemet, men vi kan se at:

$$f'(0) = 0,02 \cdot f(0) = 0,02 \cdot 11.500 = 230$$

Det vil sige, at bakteriepopulationen vokser med 230 individer pr. tidsenhed (f.eks. pr. time) til tiden $t = 0$. Vi kan med en tilnærmelse forsøge at forudsige populationens størrelse til tidspunktet $t = 1$:

$$f(1) \approx 11.500 + 230 = 11.730$$

Vi kan kun sige noget om populationens størrelse med en tilnærmelse, da væksthastigheden ikke er konstant, men derimod afhænger af populationens størrelse $f(t)$ ud fra differentialligningen $f'(t) = 0,02 \cdot f(t)$ ³. Da der er tale om populationsvækst, vil et godt gæt være, at f er en eksponentialfunktion, og et godt bud på denne funktion kan være:

$$f(t) = ce^{0,02t}$$

Da

$$f'(t) = 0,02 \cdot ce^{0,02t} = 0,02 \cdot f(t)$$

Og vi kan se, at funktionen "passer" ind i ligningen, og derfor er en løsning. Vi kan bestemme konstanten c ved hjælp af begyndelsesbetingelsen:

$$f(0) = 11.500 \leftrightarrow ce^{0,02 \cdot 0} = 11.500 \leftrightarrow c = 11.500$$
⁴

Til sidst får vi dermed løsningen:

$$f(t) = 11.500e^{0,02t}$$

Der findes forskellige typer af differentialligninger af første orden, men vi skal beskæftige os med differentialligninger af anden orden i denne opgave.

³ Carstensen m.fl. (2019), s. 149

⁴ Carstensen m.fl. (2019), s. 150

Differentialligninger af anden orden

Nu har vi introduceret konceptet om differentialligninger, og sågar også vist løsningen på en differentialligning. Den differentialligning vi beskæftigede os med i det forrige afsnit, var det man kalder en differentialligning af *første orden*. Det er fordi, vi kun differentierede $f(t)$ én gang. Nu skal vi se på differentialligninger af *anden orden*. Her indgår den anden afledte i funktionen. En differentialligning af anden orden kunne se sådan ud:

$$y'' = g(x)$$

Det er denne type differentialligning vi vil beskæftige os med i afsnittet om det skrå kast uden luftmodstand. I det tilfælde vil det dog være i vektorform og svare til $\vec{f}''(t) = \vec{a}(t)$. Den fuldstændige løsning til $y'' = g(x)$ er:

$$y = G_1(x) + k_1x + k_2 \quad ^5$$

Her kan jeg hurtigt gennem en række integrationer vise, hvordan man fra $y'' = g(x)$ når frem til den fuldstændige løsning. Først skrives ligningen op:

$$y'' = g(x)$$

Derefter integreres der på begge sider af lighedstegnet:

$$y' = \int g(x)dx$$

Hvilket efterlader os med stamfunktionen til $g(x)$, som vi kan kalde $G(x)$, samt en integrationskonstant k_1 :

$$y' = G(x) + k_1$$

Derefter integrerer vi på begge sider af lighedstegnet igen:

$$y = \int (G(x) + k_1)dx$$

Eftersom vi ikke har flere informationer om $G(x)$ kan vi ikke gøre mere ved den end at efterlade den som $\int G(x)dx$, men vi kan integrere k_1 og tilføje integrationskonstanten k_2 :

$$y = \int G(x)dx + k_1x + k_2$$

For at gøre det lettere at se på, sætter vi $\int G(x)dx = G_1(x)$, så $G_1(x)$ symboliserer stamfunktionen til $G(x)$ ⁶, og dermed er vi nået frem til den fuldstændige løsning:

$$y = G_1(x) + k_1x + k_2$$

⁵ Jensen m.fl (1991), s. 99

⁶ Jensen m.fl. (1991), s. 99

Herefter vil jeg introducere teorien for *lineære andenordens differentialligninger*. Vi skal nu kigge på en differentialligning af typen:

$$y'' + ay' + by = 0,$$

hvor a og b er kendte tal. Dette kaldes for en *lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter*⁷. Før vi kan begynde at bestemme løsningerne til denne type af differentialligning, skal vi se på det man kalder for differentialligningens *karakterligning*. Den ser sådan ud for differentialligningen $y'' + ay' + by = 0$:

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Karakterligningen foroven er den andengradslikning, som har samme koefficienter som dem, der fremkommer i vores differentialligning, hvilket er 1, a og b . Her er det vigtigt at lægge mærke til, at i andengradslikningen er tallet a vores førstegrads-koefficient, og b er vores konstantled⁸. Nu skal vi se på, hvordan man finder den fuldstændige løsning til differentialligningen. Her skal man se på, om karakterligningen har to reelle rødder, eller en dobbeltrod. Herfra bruges Sætning 7:

"For differentialligningen $y'' + ay' + by = 0$,

med tilhørende karakterligning $x^2 + ax + b = 0$, gælder:

1. Hvis karakterligningen har to forskellige reelle rødder r og s , så er

$$f(x) = ce^{rx} + de^{sx}, \quad c \text{ og } d \text{ vilkårlige konstanter}$$

samtligeløsninger til differentialligningen.

2. Hvis karakterligningen har en dobbeltrod r , så er

$$f(x) = cxe^{rx} + de^{rx}, \quad c \text{ og } d \text{ vilkårlige konstanter}$$

samtligeløsninger til differentialligningen."⁹

Sådan finder man den fuldstændige løsning for lineære andenordens differentialligninger. Her er vi efterladt med to konstanter c og d . Hvis vi skal have en *partikulær løsning*, kræver det, at vi har to begyndelsesbetingelser.

⁷ Carstensen m.fl. (2019), s. 194

⁸ Carstensen m.fl. (2019), s. 194

⁹ Carstensen m.fl. (2019), s. 194

Bevis for sætning 7

Vi skal nu gennemgå beviset for den førnævnte sætning.

Vi går først og fremmest ud fra, at karakterligningen har enten to løsninger eller en dobbeltrod. Vi bestemmer først en sammenhæng mellem koefficienten a og rødderne/dobbeltroden. Uanset om vores karakterligning har to rødder eller en dobbeltrod, så gælder faktoropløsningen:

$$x^2 + ax + b = (x - r)(x - s)^{10}$$

Vi har to tilfælde: I det ene er r og s de forskellige rødder, og i det andet er det den samme rod, så derfor $r = s$. Vi ganger paranterne ud:

$$x^2 + ax + b = x^2 - rx - sx + rs \quad \leftrightarrow \quad x^2 + ax + b = x^2 - (r + s)x + rs$$

Når vi har to polynomier, kan de kun være lig hinanden, hvis koefficienterne er ens. Vi får dermed:

$$a = -(r + s) \quad \leftrightarrow \quad a = -r - s \quad \leftrightarrow \quad a + r = -s \quad \leftrightarrow \quad a + 2r = r - s \text{ (bruges senere)}$$

Vi har derudover en differentiabel funktion f på formen $f(x) = g(x)e^{rx}$, hvor r er den ene af de to forskellige rødder eller dobbeltroden. Vi differentierer først $f(x)$ en gang. Vi bruger regnereglen i sætning 3¹¹ og får:

$$f'(x) = g'(x) \cdot e^{rx} + r \cdot e^{rx} \cdot g(x)$$

Vi gentager og finder den anden afledede:

$$f''(x) = g''(x) \cdot e^{rx} + r \cdot g'(x) \cdot e^{rx} + r \cdot g'(x) \cdot e^{rx} + r^2 \cdot g(x) \cdot e^{rx}$$

Vi kan nu sætte e^{rx} uden for parentes, og vi får:

$$f'(x) = (g'(x) + rg(x))e^{rx} \quad \text{og} \quad f''(x) = (g''(x) + 2rg'(x) + r^2g(x))e^{rx}$$

Udtrykkene indsættes i $f''(x) + af'(x) + bf(x)$:

$$\begin{aligned} & (g''(x) + 2rg'(x) + r^2g(x))e^{rx} + a(g'(x) + rg(x))e^{rx} + bg(x)e^{rx} \\ &= (g''(x) + 2rg'(x) + r^2g(x))e^{rx} + (ag'(x) + arg(x))e^{rx} + bg(x)e^{rx} \end{aligned}$$

Da alle led er ganget med e^{rx} , sætter vi uden for parentes:

$$\begin{aligned} &= (g''(x) + 2rg'(x) + r^2g(x) + ag'(x) + ar g(x) + bg(x))e^{rx} \\ &= (g''(x) + (a + 2r)g'(x) + (r^2 + ar + b)g(x))e^{rx} \end{aligned}$$

Vi udnytter at $a + 2r = r - s$, og at r er en rod i $x^2 + ax + b = 0$:

$$\begin{aligned} &= (g''(x) + (r - s)g'(x) + 0 \cdot g(x))e^{rx} \\ &= (g(x) + (r - s)g'(x))e^{rx} \quad 12 \end{aligned}$$

¹⁰ Carstensen m.fl. (2019), s. 196

¹¹ Carstensen m.fl. (2018), s. 85

¹² Carstensen m.fl. (2019), s.196

Vi skal nu først se på en situation hvor karakterligningen har to forskellige rødder $r \neq s$. Der argumenteres på denne måde:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ er løsning til } y'' + ay' + by = 0 &\leftrightarrow f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \\ &\leftrightarrow (g''(x) + (r-s)g'(x))e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Der divideres med e^{rx} på begge sider:

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow g''(x) + (r-s)g'(x) = 0 \\ &\leftrightarrow g''(x) = -(r-s)g'(x) \\ &\leftrightarrow g''(x) = (s-r)g'(x) \\ &\leftrightarrow (g'(x))' = (s-r)g'(x) \\ &\leftrightarrow g'(x) \text{ er løsning til } y' = (s-r)y \end{aligned}$$

Vi bruger nu sætning 1¹³. Da $(g'(x))' = (s-r)g'(x) \leftrightarrow y' = ky$ får vi, at

$g'(x) = qe^{(s-r)x}$, hvor q er en konstant. Vi kan bestemme $g(x)$ ved at integrere $g'(x)$:

$$g(x) = \int qe^{(s-r)x} dx = q \int e^{(s-r)x} = q \cdot \frac{1}{s-r} \cdot e^{(s-r)x} + c = \frac{q}{s-r} e^{(s-r)x} + c$$

Her har vi brugt en tabel over stamfunktioner¹⁴, samt Sætning 4's regneregul nr. 3¹⁵. Vi får nu:

$c + de^{(s-r)x}$, hvor c og d er konstanter. Om funktionen f gælder det derfor:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x)e^{rx}(c + de^{(s-r)x})e^{rx} &= ce^{rx} + d \cdot e^{sx-rx} \cdot e^{rx} = ce^{rx} + d \cdot e^{sx-rx+rx} \\ &= ce^{rx} + de^{sx} \end{aligned}$$

Hvis karakterligningen har en dobbeltrod, så er $r = s$, hvilket vil sige at $r - s = 0$. Vi har derfor:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ er løsning til } y'' + ay' + by = 0 &\leftrightarrow g''(x) + 0 \cdot g'(x) = 0 \\ &\leftrightarrow g''(x) = 0 \end{aligned}$$

Integrerer vi $g''(x)$ får vi:

$$g'(x) = \int 0 \leftrightarrow g'(x) = c$$

Og dermed

$g(x) = \int c \leftrightarrow g(x) = cx + d$, hvor c og d er konstanter, får vi her:

$$f(x) = g(x)e^{rx} = (cx + d)e^{rx} = cxe^{rx} + de^{rx}$$

Vi har nu færdiggjort beviset for Sætning 7.

¹³ Carstensen m.fl. (2019), s. 157

¹⁴ Carstensen m.fl. (2019), s. 14

¹⁵ Carstensen m.fl. (2019), s. 15

Eulers metode

Det er langt fra alle differentiaalligninger af 1. orden man kan finde en eksakt løsning til. I disse tilfælde er det nødvendigt at gøre brug af *numeriske løsningsmetoder*. En af disse er *Eulers metode*. Vi starter med en differentiaalligning af 1. orden på formen¹⁶:

$$y' = f(x, y)$$

Hvis graf går igennem et givet punkt (x_0, y_0) i xy -planen. Det gælder for differentiaalligningen for oven, at der findes netop én løsning $y = f(x)$ med randbetingelsen $f(x_0) = y_0$. Vi vil forsøge at finde en tilnærmet løsning til dette problem.

Vi starter ud i det punkt, som randbetingelsen angiver: $f(x_0) = y_0$. Vi skal så forsøge at finde tilnærmede værdier for y_1, y_2, y_3 , osv, for funktionsværdierne $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$, osv. Vores x -værdier foregår i skridt på h fra x_0 . Det vil sige:

$$x_1 = x_0 + h \qquad x_2 = x_0 + 2h \qquad x_3 = x_0 + 3h, \text{ og sådan fortsætter det.}$$

Det er her oplagt for os at bruge tangenten i punktet x_0 til at finde en approksimation til $f(x_1)$. Vi bruger følgende ligning:

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'$$

Som også kan skrives som:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Vi har her udnyttet, at $y = f(x)$ er løsning til vores differentiaalligning¹⁷. For at komme videre til den næste y -værdi, kan vi ikke længere gøre brug af tangenten i (x_0, y_0) . Da det gælder for differentiaalligningen, at der findes en løsning, hvis løsningskurven går gennem (x_1, y_1) kan vi dermed benytte kurvens tangent i punktet (x_1, y_1) og dermed regne os frem til y_2 . Her bruger vi ovenstående ligning, men erstatter y_1 med y_2 , y_0 med y_1 og $f(x_0, y_0)$ med $f(x_1, y_1)$, og vi får følgende ligning¹⁸:

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

Vi antager, at vores nye løsningskurve ligger tæt på den oprindelige graf for f , og at y_2 derfor ligger tæt på $f(x_2)$. Man fortsætter denne metode, og kan opstille den generelle formel:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

¹⁶ Matematiksider.dk, s. 1

¹⁷ Matematiksider.dk, s. 2

¹⁸ Matematiksider.dk, s. 2

Numerisk integration (Runge Kutta metoden)

Hvor Eulers metode fungerer bedst for lineære funktioner, findes der andre numeriske metoder, som kan bruges for at skabe en mere præcis tilnærmet løsningskurve. En af de metoder er Runge Kutta numerisk integration. Vi så i afsnittet om Eulers metode, at vi kunne beregne y_{n+1} ved:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)^{19}$$

Først og fremmest omformuleres Eulers metode, så vi kan sammenligne den med Runge Kutta metoden, som har en særlig formalisme. Hertil skal vi beregne en række k_i -værdier, som er udtryk for ændringer i y ²⁰. Vi starter ud med:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Herfra fjerner vi y_n fra begge sider, for at have ændringen i y på venstre side. Altså Δy , som vi betegner k_1 :

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

Herfra får vi denne definition af y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + k_1$$

I denne sammenhæng betragtes Eulers metode som en "førsteordens RK-metode"²¹, og vi kan nu udtrykke vores overvejelser om en forbedret gradient på to forskellige måder – begge med to k -værdier, k_1 og k_2 . Dette kalder vi for Runge Kutta 2. ordens metode²²:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Dette er en bedre måde at regne os frem til et resultat for $y(x + h)$, men der findes endnu bedre metoder. En af disse er 4. ordens RK-formel:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

¹⁹ Matematiksider.dk, s.2

²⁰ Britz (2010), s. 30

²¹ Britz (2010), s. 30

²² Britz (2010), s. 30

Man har her mere at beregne, men det betaler sig, da man kan tage langt større skridt hen ad kurven²³.

Gør rede for det skrå kast med og uden luftmodstand

Det skrå kast uden luftmodstand

Før vi kan begynde at snakke om det skrå kast med luftmodstand, ser vi først på, hvordan man udregner en banekurve for et skråt kast *uden* luftmodstand. Her får vi brug for vektorfunktioner. Her er en kort definition af vektorfunktioner:

”Ved en vektorfunktion $\vec{f}$ forstås en funktion, der til hver værdi af t i et interval $[a; b]$ lader svare netop én stedvektor $\vec{f}(t)$ i planen. Stedvektorens koordinater betegnes $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, hvor $x(t)$ og $y(t)$ er funktioner af t . De kaldes *koordinatfunktionerne*, og tallet t kaldes *parameteren*.”²⁴

Vektorfunktioner kan altså hjælpe os med at dele det skrå kast op i en vandret og en lodret retning. Altså en x- og en y-retning.

Til at starte med, skal vi se på Newtons 1. lov, som siger, at den samlede kraft F , der påvirker et legeme, er lig med legemets masse m ganget med legemets acceleration a :

$$F = m \cdot a^{25}$$

Da vi i dette eksempel ikke har luftmodstand med som en faktor, vil vores genstand kun være påvirket af tyngdekraften. Derfor vil vores genstands acceleration a være lig med tyngdeaccelerationen g :

$$a = g = 9,82 \text{ m/s}^2$$

Da tyngdekraften konstant er rettet nedad, vil bevægelsens acceleration også være det, og når vi angiver denne acceleration som en vektor afhængig af tiden t , får vi:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}^{26}$$

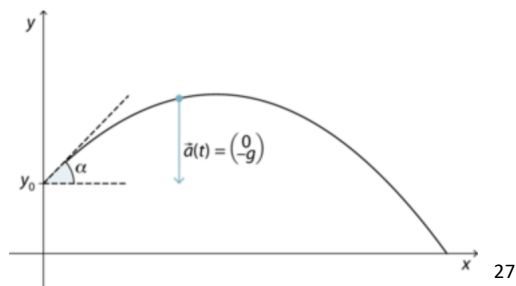
²³ Britz (2010), s. 31

²⁴ Carstensen m.fl. (2019), s. 209, Definition 1

²⁵ Carstensen m.fl. (2019), s. 243

²⁶ Carstensen m.fl. (2019), s. 244

Dette er illustreret her:



Vi får accelerationsvektoren $\vec{a}(t)$ ved at differentiere stedvektoren $\vec{f}(t)$ to gange:

$$\vec{f}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \vec{a}(t)$$

På den måde kan vi altså finde frem til stedvektoren $\vec{f}(t)$ ved at integrere vores accelerationsvektor $\vec{a}(t)$ to gange.

Vi finder først hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$, ved at integrere accelerationsvektoren én gang:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} k_1 \\ -g \cdot t + k_2 \end{pmatrix}$$

Integrerer vi så vores hastighedsvektor $\vec{v}(t)$, får vi stedvektoren $\vec{f}(t)$:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} k_1 \cdot t + k_3 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + k_2 \cdot t + k_4 \end{pmatrix}^{28}$$

Vi kan nu bestemme konstanterne k_1, k_2, k_3 og k_4 ud fra begyndelsesbetingelserne for vores kast.

Vi går ud fra, at vores genstand slippes i punktet $(0, y_0)$:

$$\vec{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Sætter vi dette ind i vores udtryk for $\vec{f}(t)$ får vi, at $k_3 = 0$ og $k_4 = y_0$.²⁹

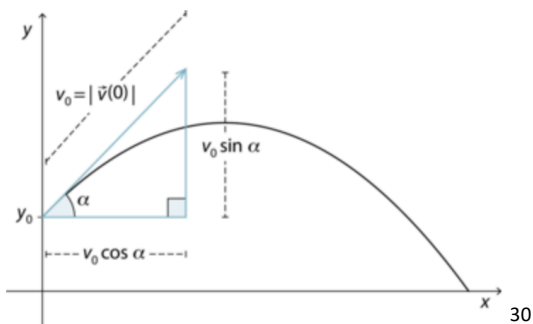
Derudover går vi ud fra, at vi slipper genstanden i en vinkel på α grader med vandret og med en begyndelseshastighed v_0 .

²⁷ Carstensen m.fl. (2019), s. 244, Figur 38

²⁸ Carstensen m.fl. (2019), s.244

²⁹ Carstensen m.fl. (2019), s. 245

Dette er vist herunder:



Vi kan altså se, at hastighedsvektoren $\vec{v}(0)$ til tidspunktet $t = 0$ har længden v_0 og α som retningsvinkel. På figuren kan vi se, at $x(t)$ er givet ved:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha)^{31}$$

Det regner vi os frem til ved brug af formelen for $\cos(v)$ for en retvinklet trekant:

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}}$$

Herfra kan vi indsætte vores kendte værdier:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{hosliggende katete}}{v_0}$$

Og derefter isolere den hosliggende katete:

$$\text{hosliggende katete} = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

og sådan har vi fundet frem til $x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha)$

Vi har brugt formelen for $\sin(v)$ i en retvinklet trekant, og brugt samme fremgangsmetode:

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{modstående katete}}{v_0} \quad \leftrightarrow \quad \text{modstående katete} = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

På den måde fandt vi frem til at $y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$. Med disse koordinatfunktioner kan vi angive vores hastighedsvektor $\vec{v}(0)$ til tidspunktet $t = 0$ som:

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}^{32}$$

³⁰ Carstensen m.fl. (2019), s. 245, Figur 39

³¹ Carstensen m.fl. (2019), s. 245

³² Carstensen m.fl. (2019), s. 245

Sætter vi disse ind i udtrykket for $\vec{v}(t)$ som vist her:

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} k_1 \\ -g \cdot 0 + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Kan vi se, at $k_1 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$ og at $k_2 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$ ³³. Vi kan nu indsætte vores værdier for k_1, k_2, k_3 og k_4 i vores stedvektor $\vec{f}(t)$:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} k_1 \cdot t + k_3 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + k_2 \cdot t + k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{pmatrix}^{34}$$

Hvis vi eliminerer parameteren t i ligningerne:

$$x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \quad \text{og} \quad y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0$$

Skal vi først udtrykke t ved x :

$$x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}^{35}$$

Og derefter indsætte t i udtrykket for y :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right) + y_0 \\ &= -\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \cdot x + y_0 \\ &= -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \cdot x + y_0 \\ &= -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0 \end{aligned}$$

Hermed kan vi se, at y er et andengradspolynomium i x . Vi kalder banekurven for en *kasteparabel*³⁶.

³³ Carstensen m.fl. (2019), s. 245

³⁴ Carstensen m.fl. (2019), s. 245

³⁵ Carstensen m.fl. (2019), s. 245

³⁶ Carstensen m.fl. (2019), s. 246

Det skrå kast med luftmodstand

Vi er nu nået til det skrå kast med luftmodstand. Nu vil jeg fortælle om, hvordan luftmodstanden generelt påvirker legemer, og bagefter bygger vi det ind i beskrivelsen af det skrå kast. Når et legeme falder lige ned, er det påvirket af to kræfter. Den ene kraft er tyngdekraften F_t som går nedad, og den anden er luftmodstanden F_{luft} , som går opad. Luftmodstanden er proportional med farten i anden og er givet ved:

$$F_{luft} = kv^2$$

Hvor proportionalitetskonstanten k afhænger af formen af objektet (drag-koefficienten c_d), tværsnitsarealet A og luftens massefylde ρ . k er givet ved:

$$k = \frac{1}{2} \cdot c_d \cdot A \cdot \rho$$

For en bold ligger dragkoefficienten (også kaldet formfaktoren) på 0,47³⁷. Newtons 2. lov siger om den resulterende kraft på vores legeme:

$$F_{res} = m \cdot a = F_t - F_{luft}^{38}$$

Accelerationen a er altid givet ved:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Og vi får dermed:

$$m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot g - kv^2$$

Vi kan gå videre med disse beregninger og isolere Δv , for at kunne vise, hvordan man med Eulers metode kan beregne farten som funktion af tid ved et frit fald, men vi skal blot bruge disse principper om luftmodstand til det skrå kast. Her bruger vi vektorer i to dimensioner.

Som beskrevet før, er luftmodstanden en kraft, som virker i modsat retning af bevægelsen (modsat hastighedsvektoren) og er proportional med farten i anden. Det kan udtrykkes ved denne vektor:

$$\vec{F}_{luft} = k|\vec{v}|^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

³⁷ en.wikipedia.org, *Drag coefficient examples*

³⁸ Baktoft (2017), s. 82

Her har jeg lavet en enhedsvektor i hastighedsvektorens retning ved at dividere hastighedsvektoren med længden. Derefter er der blevet ganget med farten i anden og proportionalitetskonstanten k . Newtons 2. lov siger nu³⁹:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} - k|v|^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Herfra skiftes accelerationen ud med hastighed differentieret, da

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Vi får dermed:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{g} - k|\vec{v}|^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Vi forkorter ved at lade en af $|\vec{v}|$ fra $|\vec{v}|^2$ gå ud med $|\vec{v}|$ i nævneren af $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ og får:

$$m \cdot \vec{g} - k|\vec{v}|\vec{v} \quad 40$$

Hvis vi skriver det om til vektorkoordinater får vi:

$$m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Deler vi det op i x og y får vi:

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = -k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \quad \text{og} \quad m \cdot \frac{dv_y}{dt} = -mg - k \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y$$

Dette er hvad man kalder for to koblede differentiaalligninger, som kan løses med Eulers metode i Excel. Til dette skal man bruge begyndelseshastighedens koordinater, som er givet ved:

$$v_{x0} = v_0 \cdot \cos(\alpha) \quad \text{og} \quad v_{y0} = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

Hvor α er kastevinklen. Når den er fundet, kan man udregne positionen ved brug af disse formler for x og y:

$$s_x = v_x \cdot \Delta t + s_{x0} \quad \text{og} \quad s_y = v_y \cdot \Delta t + s_{y0} \quad 41$$

³⁹ Baktoft (2017), s. 86

⁴⁰ Baktoft (2017), s. 86

⁴¹ Baktoft (2017), s. 86

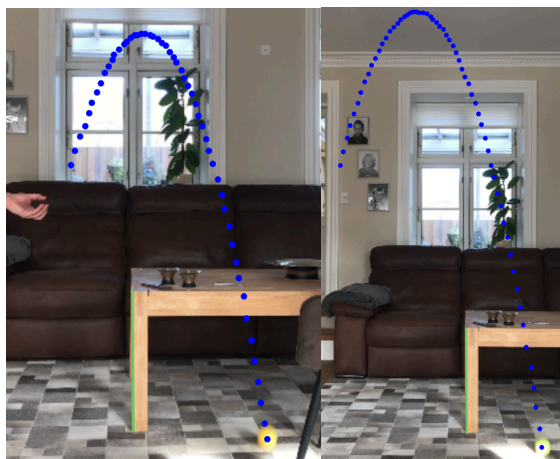
Videoanalyse af film af det skrå kast med forskellige objekter. Opstilling af tilnærmet løsningskurve ved brug af numeriske løsninger samt sammenligning af løsningskurve og observationer.

I denne del af opgaven har jeg udført to forsøg. I det første forsøg filmede jeg mig selv kaste en tennisbold op i luften, og i det andet forsøg kastede jeg en gul plastikbold af samme størrelse. Eftersom forsøget er et skråt kast *med* luftmodstand, var jeg nødt til at veje begge bolde, finde deres formfaktor, samt beregne deres tværsnitsareal. Dette skal vi alt sammen bruge til vores udregninger senere.

	m	c_d (formfaktor)	r	A
<i>Gul bold</i>	0,016 kg	0,47	3,5 cm = 0,035 m	$\pi \cdot (0,035)^2$ = 0,0038
<i>Tennisbold</i>	0,062 kg	0,47	3,5 cm = 0,035 m	$\pi \cdot (0,035)^2$ = 0,0038

Efter at have filmet de to kast, lavede jeg en videoanalyse, hvor jeg markerede boldens position på forskellige tidspunkter i kastet. Ud fra punkterne fik jeg 4 forskellige værdier: x , y , v_x , v_y .

Videoanalysen for kastene så således ud:



Eftersom jeg ikke kendte v_0 eller kastevinklen α , brugte jeg min videoanalyse til at finde v_{x0} og v_{y0} , samt x_0 og y_0 for boldene. Derfra handlede det om at dele kastet op i en x- og en y-retning og gøre brug af Eulers metode.

Vi skal først se på, hvilke kræfter, der påvirker x-retningen. Her vil det udelukkende være luftmodstanden, der påvirker legemet, og vi får dermed:

$$F_{res} = -F_{luft}$$

Da det påvirker legemet i den modsatte retning af hastigheden. Ifølge Newtons 2. lov får vi:

$$m \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

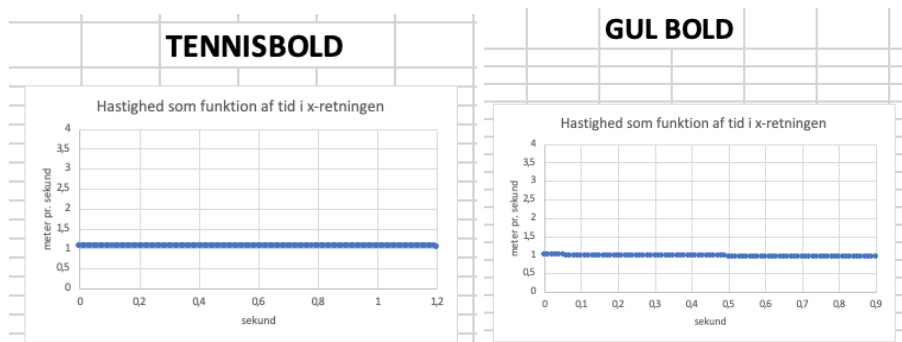
Og da $a = v'$:

$$v' = -\frac{c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}{2 \cdot m}$$

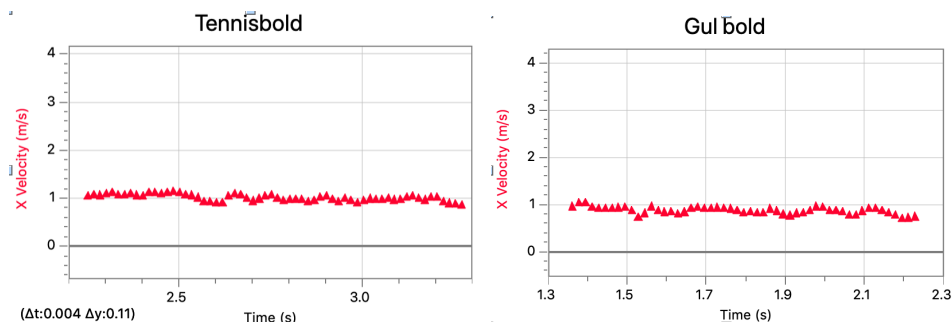
Vi kan her tage fat i Eulers metode og udregne hastigheden ved brug af:

$$v_{n+1} = v_n - \frac{c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}{2 \cdot m} \cdot \Delta t \quad 42$$

Jeg brugte her vores informationer fra tabellen på forrige side, samt en begyndeshastighed for x-retningen $v_{x0} = 1,083 \frac{m}{s}$ for tennisbolden og $v_{x0} = 1,003 \frac{m}{s}$ for den gule bold. Δt blev sat til 0,01 for at give så små spring i tiden som muligt, hvilket gav mig en masse beregninger at udføre. Jeg brugte Excel og indsatte formelen for hhv. v' og v_{n+1} med de korrekte værdier og trak ned. For de to kast gav det os følgende grafer for hastigheden i x-retningen:



Ud fra vores observationer, fik vi følgende grafer for hastigheden i x-retningen:

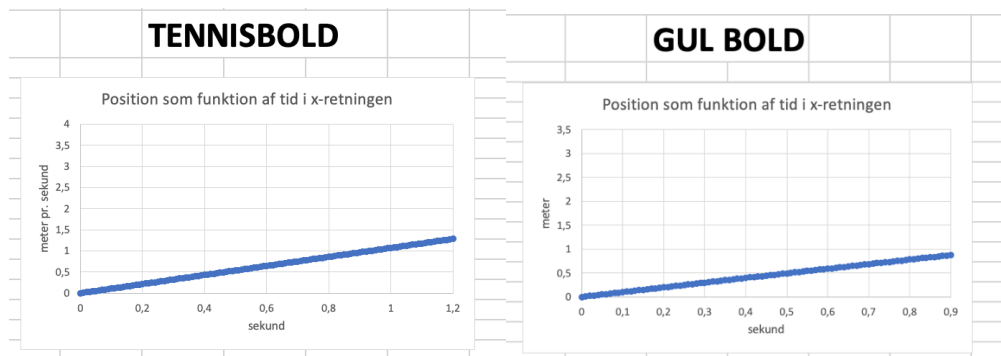


⁴² Pedersen m.fl. (2019), "Eulers metode"

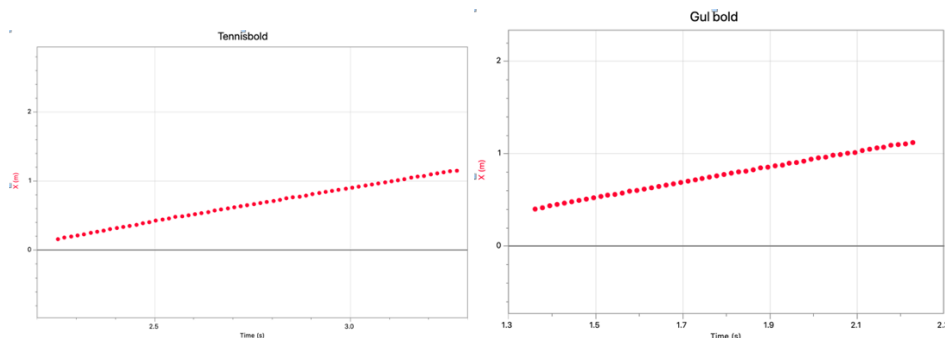
Til at beregne x -værdierne for bevægelsen brugte jeg formlen herunder, samt $x_0 = 0$ for både den gule bold og tennisbolden.

$$x_{n+1} = v_n \cdot \Delta t + x_n \text{ (se afsnit om skrå kast med luftmodstand)}$$

Jeg fik følgende grafer for positionen af bolden i x -retningen:



Hvor graferne positionen i x -retningen for mine observationer så sådan ud:



For bevægelsen i y -retningen, skal den deles op i to dele. Når legemet bevæger sig opad, vil det være påvirket af luftmodstanden i den negative retning, samt af tyngdekraften, og vi får dermed:

$$F_{res} = -F_{luft} - F_t$$

Her har vi ifølge Newtons 2. lov:

$$m \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 - m \cdot g$$

Da $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, får vi:

$$m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \cdot c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 - m \cdot g$$

Vi kan herefter isolere Δv og vi får:

$$\Delta v = \left(\frac{-\frac{1}{2} \cdot c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}{m} - g \right) \cdot \Delta t \quad 43$$

Herefter beregnede jeg v_{n+1} ved brug af:

$$v_{n+1} = v_n + \Delta v$$

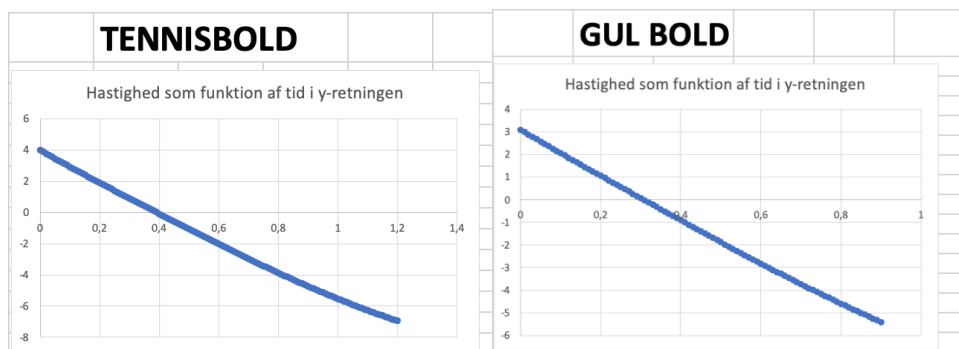
Når så legemet når sit toppunkt, og hastigheden bliver negativ (legemet er på vej ned), vil luftmodstanden i stedet være positiv, da det påvirker legemet i den modsatte retning af bevægelsen. Da legemet bevæger sig nedad, vil luftmodstanden påvirke legemet opad. Vi får:

$$F_{res} = F_{luft} - F_t$$

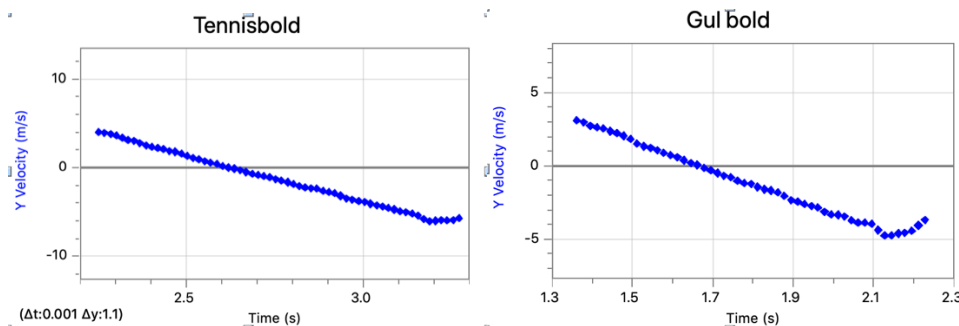
Herfra ser formlen ikke meget mere anderledes ud, og Δv vil i stedet beregnes ved:

$$\Delta v = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot c_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2}{m} - g \right) \cdot \Delta t \quad 44$$

Hvor v_{n+1} stadig beregnes på samme måde. Kastene havde en v_{y0} på hhv. $v_{y0} = 3,989$ for tennisbolden og $v_{y0} = 3,087$ for den gule bold. Grafen for hastigheden i y-retningen så dermed således ud:



Hvor mine observationer af hastigheden i y-retningen så sådan ud:



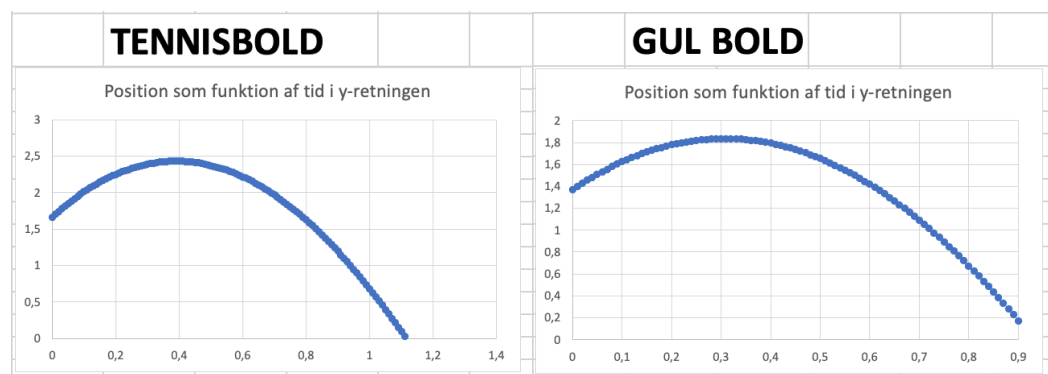
⁴³ Pedersen m.fl. (2019), "Eksempel 531: Fald med luftmodstand"

⁴⁴ Pedersen m.fl. (2019), "Eksempel 531: Fald med luftmodstand"

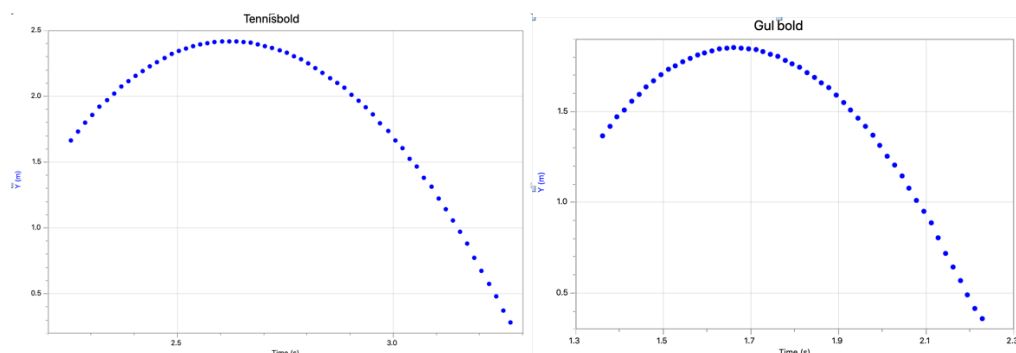
Til sidst skulle jeg så beregne positionen af bolden i y-retningen, som funktion af tiden. Til at gøre dette brugte jeg formelen:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{v_n + v_{n+1}}{2} \cdot \Delta t \quad ^{45}$$

Hertil fik jeg disse grafer for positionen i y-retningen:



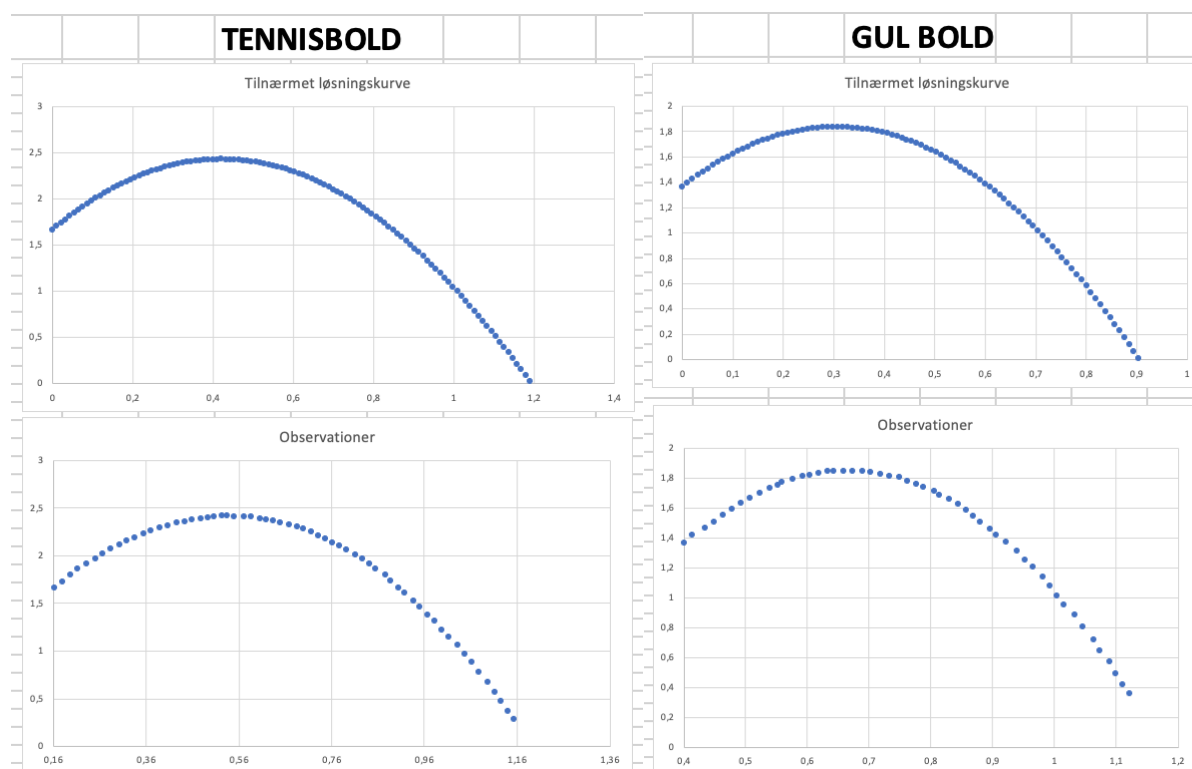
Hvortil observationerne så således ud:



⁴⁵ Pedersen, m.fl. (2019), "Eksempel 531: Fald med luftmodstand"

Vurdering og diskussion af modellens validitet

Her har jeg gemt det bedste til sidst. Vi har i sidste afsnit sammenlignet graferne jeg har fremstillet vha. Eulers metode med "graferne" for mine observationer for hhv. hastighederne til tiden t , i x- og y-retningen, samt positionen til tiden t , i x- og y-retningen. Her synes jeg generelt, at modellen har været god til at forudsige bevægelsen for det skrå kast. Tilbage er der at sammenligne sammenhængen mellem x og y for mine tilnærmede løsningskurver samt for mine observationer for at skabe et fuldentt billede af min models evne til at forudsige kastets bevægelse.



Hertil vil jeg selv mene, at min model forudsiger bevægelsen af det skrå kast ret præcist. Dog har jeg benyttet mig af Eulers metode, hvilket ikke er den bedste numeriske løsningsmetode at bruge, som vi også diskuterede tidligere i opgaven. For at minimere usikkerheden ved Eulers metode mest muligt, valgte jeg en Δt på 0,01 så mine tilvækster var så små som muligt. Det ville potentielt have været mere hensigtsmæssigt at bruge Runge Kutta's 4. ordens numerisk integration, da den er mere præcis, og vi samtidig ville kunne bruge større tilvækster for t .

Konklusion

Opgavens formål var først og fremmest at give en introduktion til differentialligninger og differentialligninger af 2. orden. Derudover skulle der gøres rede for Eulers metode, samt numerisk integration. Opgaven har givet en kort introduktion til konceptet om differentialligninger, og er derefter gået videre til at forklare om to typer af 2. ordens differentialligninger. Derudover har opgaven formålet at bevise to fuldstændige løsninger for lineære andenordens differentialligninger. Opgaven har gjort rede for Eulers metode, samt Runge Kutta numerisk integration og kort diskuteret fordele ved en metode over en anden. Derudover har det været formålet at der skulle gøres rede for det skrå kast med og uden luftmodstand. Der er blevet gjort rede for det skrå kast både uden og med luftmodstand ved hjælp af blandt andet vektorfunktioner. Derudover er der i opgaven blevet filmet to videoklip, som demonstrerer et skråt kast med hhv. en tennisbold og en gul plastikbold. Der er foretaget videoanalyse, og opgaven har benyttet nogle randbetingelser til at kunne bruge Eulers metode til at forudsige bevægelsen af kastet. Der er undervejs blevet sat grafer op for modellens forudsigelse af bevægelsen, samt grafer for bevægelsen selv. Til sidst skulle der laves en overordnet vurdering om hvorvidt modellen præcist kunne forudsige boldenes bevægelse i det skrå kast med luftmodstand. Vurderingen lød på, at modellen kunne forudsige bevægelsen ret præcist. En mere præcis tilnærmet løsningskurve kunne være forekommet, hvis der var blevet brugt Runge Kutta's 4.ordens metode, men der er blevet kompenseret for brug af Eulers metode vha. meget små tilvækster Δt .

Litteraturliste

Fysisk materiale

Baktoft, Allan, *Matematik i virkeligheden. Bind 4.*, 2. udgave, Natskyggen, Danmark 2017.
(Baktoft (2017))

Carstensen m.fl., *MAT A2 stx*, 3. udgave, Systime, Aarhus 2018. (Carstensen m.fl. (2018)).

Carstensen m.fl., *MAT A3 stx*, 2. udgave, Systime, Aarhus 2019. (Carstensen m.fl. (2019)).

Clausen, Flemming m.fl., *Integralregning og differentialligninger*, 1. udgave, Munksgaard, København 1993. (Clausen m.fl. (1993)).

Jensen, Steffen; Sørensen, Karin, *Teori og redskab 6, Integralregning og differentialligninger*, Christian Ejlers' Forlag, København 1991. (Jensen m.fl. (1991))

Digitalt materiale

Britz, Dieter, *Noter til elementær numerisk regning*, Kemisk Institut, Aarhus Universitet
https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiXrfHn-snvAhXo-SoKHQIIA5YQFjAAegQIDBAD&url=https%3A%2F%2Fchem.au.dk%2Ffileadmin%2Fwww.chem.au.dk%2FUndervisningsmateriale%2FDieter_Britz%2Fnumcomp-dk.pdf&usg=AOvVaw2V1LQW8xMw37xjD1CdsqSL (Besøgt 24/03/2021) (Britz (2010))

Pedersen, Danni Thorkild; Rohde, Christian Frickmann, *I-Fysik C-B*, 3. I-bogsudgave, Gyldendal, 2019. Besøgt 26/03/2021 på URL: <https://ifysikcb.ibog.gyldendal.dk/index.php?id=178#c2150>
(Pedersen m.fl. (2019))

da.wikipedia.org. *Luftmodstand*. Besøgt 26/03/2021 på URL:
<https://da.wikipedia.org/wiki/Luftmodstand> (da.wikipedia.org)

en.wikipedia.org. *Drag coefficient*. Besøgt 26/03/2021 på URL:
https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient (en.wikipedia.org)

[0B- Numerisk løsning af differentialligninger - Matematiksider.dk](http://www.matematiksider.dk)
www.matematiksider.dk › eulers metode
(Besøgt 24/03/2021) (matematiksider.dk)

Den tillader ikke korrekt layout på kilden ovenover, hvis den skal kunne åbnes, da det er link til en pdf.