Opgave 3 Mekanikopgave med elevbesvarelse

Kommentar før du bliver helt forskrækket over opgavebesvarelsen: Man behøver ikke skrive så meget tekst som der er gjort her – husk der er mange opgaver der skal løses, men læg mærke til de tegenede figurer! Ligninger behøver du heller ikke løse i hånden som det er gjort her – det er fint nok at bruge ”solve” i nspire.

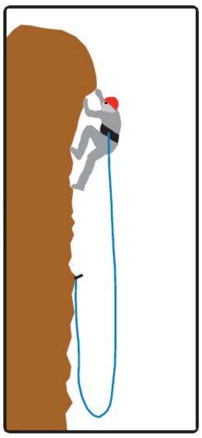
Bjergbestigning

Det er vigtigt, at bjergbestigere bruger sikkerhedsudstyr. Eksempelvis beskytter en hjelm hovedet ved faldulykker og mod nedfaldende klippestykker. Under klatring er en bjergbestiger bundet fast til et elastisk sikkerhedsreb, der er fastgjort til klippevæggen. Hvis bjergbestigeren falder, vil sikkerhedsrebet påvirke ham med en elastisk kraft, som bremser faldet.

Foto: Jef Maion

På en klatretur befinder en bjergbestiger sig 22 m under en kammerat, der uheldigvis løsriver en sten, som rammer bjergbestigerens hjelm.

a) Beregn stenens fart, når den rammer bjergbestigerens hjelm.



En bjergbestiger klatrer på en klippevæg og er bundet fast til et elastisk sikkerhedsreb, som har fjederkonstanten 1,20 kN/m. Ved et uheld falder bjergbestigeren lodret ned. Når sikkerhedsrebet strækkes, bliver faldet bremset. Under faldet opnår sikkerhedsrebet en maksimal forlængelse på 5,5 m. Massen af bjergbestigeren er 86 kg.

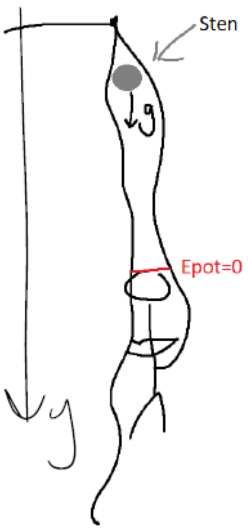
b) Beregn størrelsen af den største acceleration, som bjergbestigeren udsættes for, mens sikkerhedsrebet strækkes.

Sikkerhedsrebet er 13,0 m langt, og det er fastgjort til klippevæggen 3,1 m under bjergbestigeren. Ved uheldet falder bjergbestigeren derfor frit 16,1 m ned, før det elastiske reb forlænges og bremser hans fald. Efter nogle få svingninger op og ned hænger bjergbestigeren stille.

c) Hvor langt under rebets fastgørelsespunkt ender bjergbestigeren med at hænge stille?
Beregn den største fart, som bjergbestigeren opnår under faldet.

Elevbesvarelse

a) På en klatretur befinder en bjergbestiger sig 22m under en kammerat, der uheldigvis løsriver en sten, som rammer bjergbestigerens hjelm. Beregn stenens fart, når den rammer bjergbestigerens hjelm.



Vi kan bruge sammenhængen mellem kinetisk og potentiel energi til at beregne stenens fart, når den rammer hjelmen. Vi ser bort fra luftmodstanden.

Nulpunktet for potentiel energi sættes ved bjergbestigerens hjelm. Når stenen bliver løsrevet, er den kinetiske energi 0 så og der er kun potentiel energi, og når stenen så rammer hjelmen, er der kun kinetisk energi. Dvs. at alt den potentielle energi bliver omdannet til kinetisk energi, så det gælder, at

$$E_{pot} = E_{kin}$$

Vi kan så sætte formlerne ind og isolere hastigheden

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Massen på begge sider går ud

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2$$

Vi ganger med 2, og tager derefter kvadratroden

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

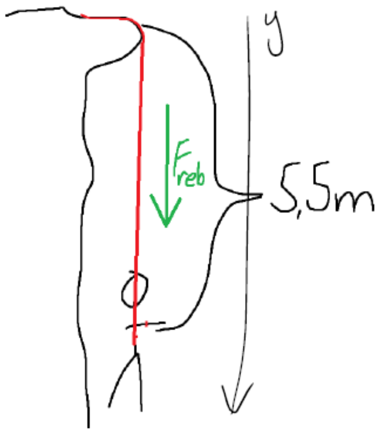
Så kan vi sætte tyngdeaccelerationen og højden ind. Højden er som nævnt i opgaven 22m.

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}82 \frac{m}{s^2} \cdot 22m} = 20{,}7865 \frac{m}{s} \approx 21 \frac{m}{s}$$

Stenens fart er 21m/s, når den rammer bjergbestigerens hjelm.

En bjergbestiger klatrer på en klippevæg og er bundet fast til et elastisk sikkerhedsreb, som har fjederkonstanten 1,20 kN/m. Ved et uheld falder bjergbestigeren lodret ned. Når sikkerhedsrebet strækkes, bliver faldet bremset. Under faldet opnår sikkerhedsrebet en maksimal forlængelse på 5,5m. Massen af bjergbestigeren er 86 kg.

b) Beregn størrelsen af den største acceleration, som bjergbestigeren udsættes for, mens sikkerhedsrebet strækkes.



Vi skal regne accelerationen ud, og det kan vi gøre med Newtons 2. lov

$$F_{res} = m \cdot a$$

Massen er oplyst i opgaven, og er 86kg. Vi skal så bare beregne kraften. Vi ser bort fra luftmodstand, så den eneste kraft, der påvirker bjergbestigeren, er kraften fra rebet. Rebet opfører sig som en fjeder, og har fjederkonstanten k på 1,20 kN/m. Rebets kraft udregnes med formlen

$$F_{reb} = -k \cdot y$$

Hvor y er den længde, rebet udstrækkes, hvilket er 5,5m. Tyngdekraften har også betydning for den resulterende kraft. Den har formlen

$$F_t = m \cdot g$$

Så bliver den resulterende kraft

$$F_{res} = F_{fjeder} + F_t = m \cdot g - k \cdot y$$

Hvis vi sætter det ind i Newtons 2. lov, får vi

$$m \cdot g - k \cdot y = m \cdot a$$

Hvor vi så kan finde accelerationen

$$a = \frac{m \cdot g - k \cdot y}{m}$$

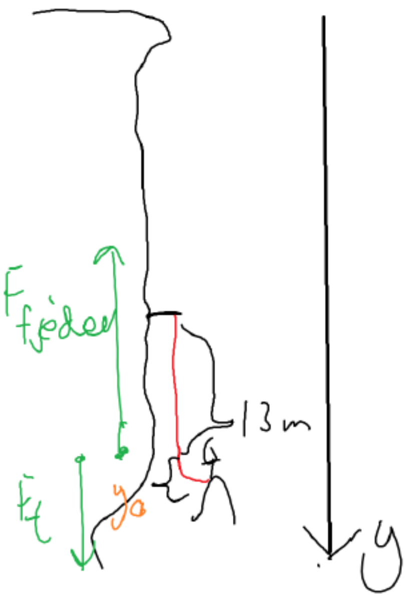
Så skal vi bare sætte tallene ind og regne accelerationen ud:

$$a = \frac{m \cdot g - k \cdot y}{m} = \frac{86kg \cdot 9{,}82\frac{m}{s^2} - 1{,}2\frac{kN}{m} \cdot 5{,}5m}{86kg} = -66{,}9242\frac{m}{s^2} \approx -67\frac{m}{s^2}$$

Den største acceleration, som bjergbestigeren udsættes for, mens sikkerhedsrebet strækkes, er -67$\frac{m}{s^2}$, dvs. at han får en acceleration på 67$\frac{m}{s^2}$ opad.

Sikkerhedsrebet er 13,0 m langt, og det er fastgjort til klippevæggen 3,1 m under bjergbestigeren. Ved uheldet falder bjergbestigeren derfor frit 16,1 m ned, før det elastiske reb forlænges og bremser hans fald. Efter nogle få svingninger op og ned hænger bjergbestigeren stille.

c) Hvor langt under rebets fastgørelsespunkt ender bjergbestigeren med at hænge stille?
Beregn den største fart, som bjergbestigeren opnår under faldet.



Vi skal finde det punkt, hvor manden hænger stille. Det gør han i ligevægtsdeformationspunktet y_0. I det punkt er den resulterende kraft 0. Dvs. at fjederkraften udligner tyngdekraften, så de er lig med hinanden.

$$F_{res} = F_t + F_{fjeder} = 0$$

$$F_t = -F_{fjeder}$$

Så kan vi sætte formlerne ind:

$$m \cdot g = -k \cdot y_0$$

Vi isolerer så y_0 som vi vil finde

$$y_0 = \frac{m \cdot g}{-k}$$

Massen af manden er 86kg og fjederkonstanten er stadig 1,20kN/m. Det sætter vi ind og regner y_0 ud.

$$y_0 = \frac{86kg \cdot 9{,}82\frac{m}{s^2}}{1{,}20\frac{kN}{m}} = 0{,}7038m \approx 0{,}70m$$

Nu har vi ligevægtsdeformationspunktet. Det skal vi lægge til rebets ustrækte længde for at finde ud af, hvor langt rebet er.

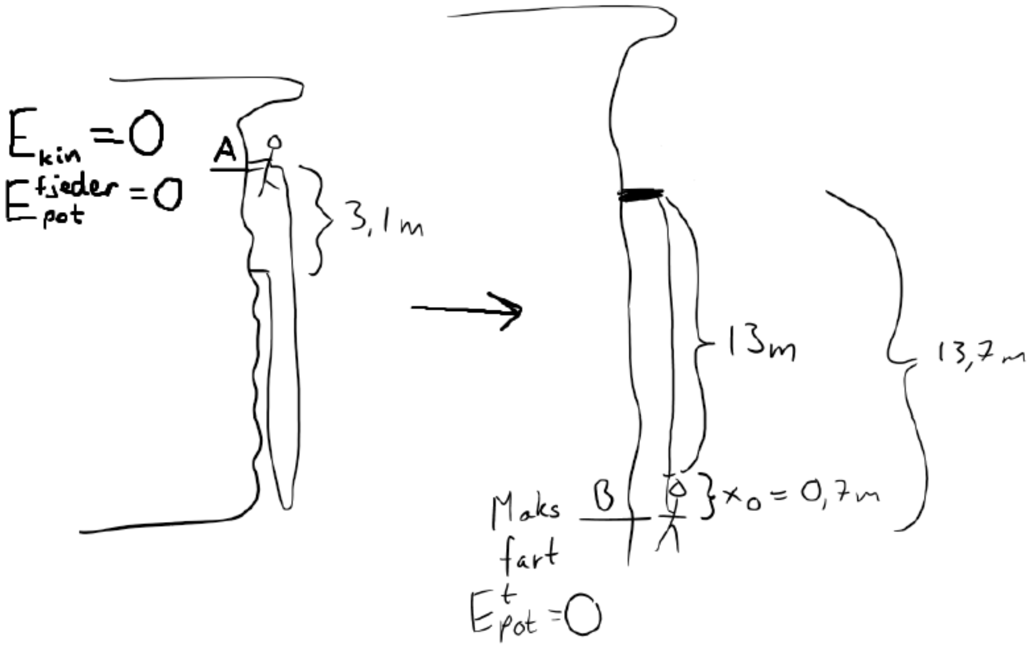
$$l_{reb} = y + y_0 = 13m + 0{,}70m = 13{,}7m$$

Rebet er 13,7m når han hænger stille, så han hænger 13,7m under fastgørelsespunktet.

Så skal vi beregne den maksimale fart, manden opnår under faldet.

Det kan vi gøre ved at kigge på forholdet mellem de potentielle energier og kinetisk energi.

$$E_{mek} = E_{pot}^{t} + E_{pot}^{fjeder} + E_{kin}$$



Ligevægtsdeformationspunktet, der hvor manden ender med at hænge stille, er også der, hvor han har størst fart. Accelerationen er lig med tyngdeaccelerationen indtil 13m under rebets fastgøringspunkt. Når rebet begynder at strække, bliver accelerationen mindre, i takt med at den resulterende kraft bliver mindre, fordi fjederkraften nærmer sig tyngdekraften i styrke. I ligevægtsdeformationspunktet er den resulterende kraft 0, så accelerationen er også 0. Derefter begynder accelerationen af blive negativ. Det er altså lige inden, accelerationen bliver negativ, at manden vil have størst fart.

Vi antager, at den mekaniske energi er bevaret gennem faldet. Så vælger vi at kigge på den mekaniske energi i to punkter, punkt A lige inden manden falder, og punkt B, hvor han hænger stille i ligevægtsdeformationspunktet.

Inden manden falder, har han ikke nogen kinetisk energi, og den potentielle fjederenergi er også 0, fordi rebet ikke er strakt. Dvs. at den mekaniske energi her er lig med den potentielle energi for tyngdekraften.

Der hvor manden hænger stille, sætter vi nulpunktet for den potentielle energi for tyngdekraften. I det punkt er rebet udtrukket lidt, så der er noget potentiel fjederenergi, og der er også kinetisk energi, da han har høj fart i det punkt. Vi kan skrive den mekaniske energi i de to punkter op:

$$E_{mek}^{A} = E_{pot}^{t,A}$$

$$E_{mek}^{B} = E_{pot}^{fjeder,B} + E_{kin}^{B}$$

Som sagt er den mekaniske energi bevaret

$$E_{mek}^{A} = E_{mek}^{B}$$

Derfor kan vi også stille denne ligning op:

$$E_{pot}^{t,A} = E_{pot}^{fjeder,B} + E_{kin}^{B}$$

Vi kan så sætte formlerne ind:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Så kan vi regne lidt for at isolere v i ligningen

Først ganger vi op med 2

$$2 \cdot m \cdot g \cdot h = k \cdot x_0^2 + m \cdot v^2$$

Så trækker vi $k \cdot x_0^2$ fra

$$2 \cdot m \cdot g \cdot h - k \cdot x_0^2 = m \cdot v^2$$

Til sidst dividerer vi med m, hvorefter vi tager kvadratroden

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h - k \cdot x_0^2}{m}}$$

Massen er ligesom før mandens masse på 86kg. Højden er den længde, manden har faldet i punkt B, hvilket er længden ned til fastgøringspunktet lagt sammen med længden af det udstrakte reb

$$h = 3{,}1m + 13{,}7m = 16{,}8m$$

x_0 regnede vi ud før, og det er den længde, rebet er strakt udover den ustrakte længde i ligevægtsdeformationspunktet, altså 0,7m. Fjederkonstanten k er stadig den samme, $1{,}2\frac{kN}{m}$. Så kan vi sætte alle tallene ind i formlen og regne hastigheden ud:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 86kg \cdot 9{,}82\frac{m}{s^2} \cdot 16{,}8m - 1{,}2 \cdot 10^3\frac{N}{m} \cdot (0{,}7m)^2}{86kg}} = 17{,}9754\frac{m}{s} \approx 18\frac{m}{s}$$

Under faldet opnår bjergbestigeren en maksimal fart på 18m/s, og han ender med at hænge stille 13,7m under rebets fastgørelsespunkt.