



UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Ny ordning

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling.

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1-9.

Delprøve 2 består af opgave 10-15.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.

Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.

I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*
Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.
- *Formidling og forklaring*
Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 I et koordinatsystem er en vektorfunktion $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}.$$

(5 point)

a) Bestem $\vec{r}(1)$.

(10 point)

b) Undersøg, om punktet $Q(7,8)$ ligger på banekurven for $\vec{r}$.

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 - 2x + 1.$$

(10 point)

a) Bestem $\int f(x) dx$.

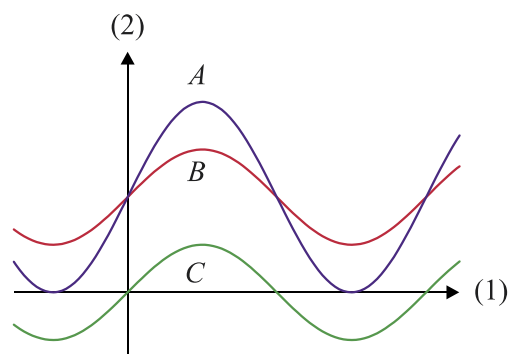
I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen samt linjerne $x=1$ og $x=3$ en punktmængde M , der har et areal.

(10 point)

b) Bestem arealet af M .

Opgave 3 På figuren ses graferne A , B og C for tre harmoniske svingninger:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ g(x) &= \sin(x) + 2 \\ h(x) &= 2 \cdot \sin(x) + 2 \end{aligned}$$



(10 point)

a) Gør for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af funktionerne f , g og h den hører til.

Opgave 4 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (y - 1),$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, 5)$.

(10 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot e^x.$$

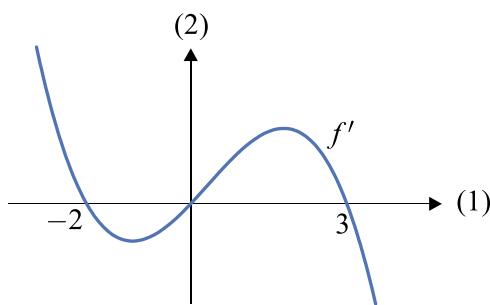
(5 point)

a) Bestem $f(0)$.

(5 point)

b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 6 På figuren ses grafen for den afledede funktion f' for en funktion f i intervallet $[-3; 4]$.



(10 point)

a) Bestem monotoniforholdene for funktionen f i intervallet $[-3; 4]$.

Opgave 7 I et koordinatsystem er to punkter givet ved $A(4, 3)$ og $B(11, 4)$. Punktet P ligger på førsteaksen og har samme afstand til A og B .

(10 point)

a) Tegn en model af situationen, og bestem førstekoordinaten til P .

Opgave 8



Foto: www.colourbox.com

I et boligområde i en storby er der etableret et gangsystem mellem seks boligblokke markeret $A - F$.

Tabellen viser en oversigt over gangsystemet samt den tid (målt i minutter), det tager at gå fra en boligblok til en anden.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	-	7	-	1
B	2	-	6	-	8	-
C	-	6	-	6	3	-
D	7	-	6	-	2	-
E	-	8	3	2	-	-
F	1	-	-	-	-	-

Til opgaven hører et bilag.

- (10 point) a) Tegn en vægtet graf, der repræsenterer tabellen, hvor boligblokkene udgør hjørnerne, og gangstierne udgør kanterne med angivelse af gåtiden mellem blokkene.
- (10 point) b) Udfyld en Dijkstra-tabel, og benyt denne til at bestemme den hurtigste gærute i gangsystemet fra boligblok F til boligblok E .

Benyt eventuelt vedlagte bilag.

Opgave 9



I en model kan temperaturudviklingen i et vandbad under afkøling beskrives ved en funktion f , hvor $f(t)$ betegner vandbadets temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).

I modellen er væksthastigheden for vandbadets temperatur proportional med forskellen mellem omgivelsernes temperatur og vandbadets temperatur.

Det oplyses, at omgivelsernes temperatur er 22°C , og at proportionalitetskonstanten er $0,01\text{s}^{-1}$.

- (10 point) a) Bestem væksthastigheden for vandbadets temperatur, når vandbadets temperatur er 50°C .
- (5 point) b) Opskriv en differentialligning, som f må være en løsning til.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

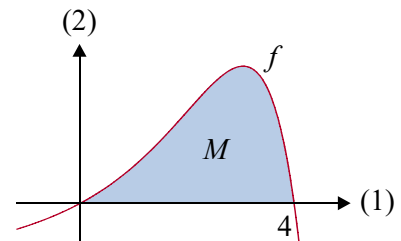
Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (e^x - 1) \cdot (4 - x).$$

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen en punktmængde M , der har et areal.



(10 point)

a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen.

(10 point)

b) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0,0)$.

Opgave 11



Foto: www.colourbox.com

Fra en bestemt producent har man udtaget en stikprøve på 200 poser med økologiske kartofler. Tabellen viser vægten af hver af de 200 poser.

	Pose 1	Pose 2	...	Pose 199	Pose 200
Vægt (g)	1404	1497	...	1505	1523

(Resten af tabellen findes i bilaget "vægt_af_kartofler.xlsx")

I en model kan vægten af en pose økologiske kartofler fra producenten beskrives ved en stokastisk variabel X .

(10 point)

a) Gør rede for, at X tilnærmelsesvis er normalfordelt.

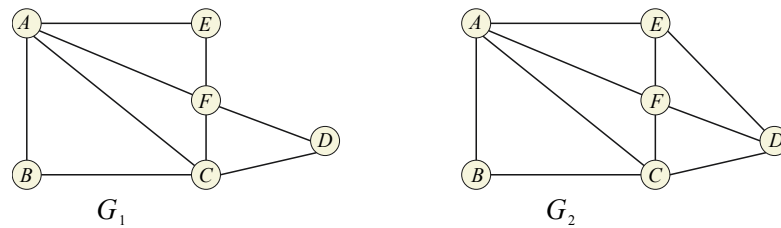
(5 point)

b) Benyt stikprøven til at bestemme middelværdi og spredning af X .

(10 point)

c) Benyt modellen til at bestemme sandsynligheden for, at en pose økologiske kartofler fra producenten vejer mindre end 1450 g.

Opgave 12 Figuren viser to grafer G_1 og G_2 .



(5 point) a) Gør rede for, at G_1 er en Eulergraf.

(10 point) b) Bestem en Eulertur i G_2 .

Opgave 13 I et koordinatsystem er tre punkter A , B og C bestemt ved stedvektorerne

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorfunktionen $\vec{r}$ er bestemt ved

$$\vec{r}(t) = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \overrightarrow{OB} + t^2 \cdot \overrightarrow{OC}.$$

(10 point) a) Gør rede for, at koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ til $\vec{r}(t)$ er givet ved

$$x(t) = -21 \cdot t^2 + 32 \cdot t + 2$$

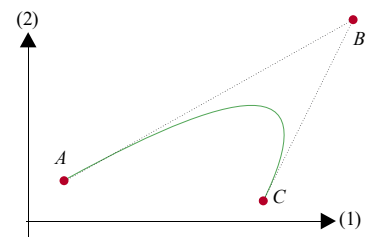
$$y(t) = -17 \cdot t^2 + 16 \cdot t + 2.$$

(10 point) b) Undersøg, om $\vec{r}'(0)$ er parallel med $\overrightarrow{AB}$.

Bezier-kurver anvendes blandt andet i computergrafik til at frembringe skalerbare glatte kurver. Den kvadratiske Bezier-kurve med A og C som endepunkter er den del af banekurven for $\vec{r}$, der svarer til $0 \leq t \leq 1$.

Det oplyses, at buelængden af en banekurve i intervallet $a \leq t \leq b$ kan bestemmes ved

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$



(10 point) c) Bestem længden af den kvadratiske Bezier-kurve fra A til C .

Opgave 14



Foto: www.colourbox.com

I en model for overskuddet fra produktionen af et bestemt produkt i en virksomhed er overskuddet som funktion af antal arbejdstimer og investering i maskiner bestemt ved

$$f(x, y) = 100 \cdot x^{0,6} \cdot y^{0,4} - 250 \cdot x - 0,1 \cdot y,$$

hvor $f(x, y)$ betegner overskuddet (målt i kr.), x betegner antallet af arbejdstimer (målt i timer), og y betegner investeringen i maskiner (målt i kr.).

(5 point)

- a) Bestem overskuddet fra produktionen, når der bruges 2000 arbejdstimer, og der investeres 100 000 kr. i maskiner.

(10 point)

- b) Bestem gradienten for f , når $x = 2000$ og $y = 100\,000$, og giv en fortolkning af denne.

Opgave 15



Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier af befolkningstallet og befolknings-tilvæksten i Indien i en periode fra 1960 og frem.

Befolkningstal (mio.)	449	498	554	621	697	782	870	960	1053	1144	1231	1309
Befolkningstilvækst (mio. pr. år)	8	9,8	11,2	13,4	15,2	17	17,6	18,0	18,6	18,2	17,4	15,6

(Tabellen findes også i bilaget "Indiens_befolkningstal.xlsx")

I en model kan sammenhængen beskrives ved en differentialligning af typen

$$y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c,$$

hvor y og y' betegner henholdsvis befolkningstallet (målt i mio.) og befolknings-tilvæksten (målt i mio. pr. år) til tidspunktet t (målt i år efter 1960).

(10 point)

- a) Benyt tabellens data til at bestemme a , b og c .

Det oplyses, at befolkningstallet i Indien i 1960 var 449 mio.

(10 point)

- b) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen sammen med løsningskurven for udviklingen i Indiens befolkningstal efter 1960.

(5 point)

- c) Benyt modellen til at bestemme det maksimale befolkningstal i Indien efter 1960.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Bilag til opgave 8

Hjørne	A	B	C	D	E	F
Korteste sti til F						
Sidst besøgte hjørne						
Status						

Indstik til formelsamlingen ny stx matematik A maj 2019

Dijkstras algoritme til bestemmelse af den korteste sti fra et givet hjørne til grafens øvrige hjørner

Trin 0.

1. Tegn en Dijkstra-tabel, og tildel alle hjørner status M .
2. Tildel starthjørnet stilængde 0 og øvrige hjørner stilængde ∞ .

Trin 1.

3. Vælg det hjørne blandt hjørner med status M , der har den hidtil mindste stilængde til starthjørnet (i første runde vælges starthjørnet).
4. Bestem stilængderne fra starthjørnet via det valgte hjørne til dets nabohjørner med status M , og opdater stilængden i de tilfælde, hvor der kan opnås en kortere sti.
5. Hvis stilængden opdateres, så angiv hvilket hjørne, der sidst er besøgt.
6. Giv det valgte hjørne i punkt 3. status P , når det er blevet færdigbehandlet.

Trin 2.

7. Gentag punkterne under trin 1, indtil sluthjørnet opnår status P .
8. Ved at læse Dijkstra-tabellen "baglæns" kan den korteste sti fra starthjørnet til sluthjørnet bestemmes.

Dijkstra-tabel med n hjørner og starthjørne H_i

Hjørne	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{n-1}	H_n
Korteste sti til H_i						
Sidst besøgte hjørne						
Status						

Prims algoritme til bestemmelse af det minimale udspændende træ

1. Vælg et hjørne i grafen.
2. Vælg den billigste kant, der ligger ved hjørnet, og tilføj kanten og hjørnet, som kanten fører hen til.
3. Vælg igen den billigste kant, der ligger ved ét af de valgte hjørner, og tilføj kanten og det hjørne, som kanten førte hen til.
4. Gentag proceduren i 3. under forudsætning af, at du ikke laver en kreds i den valgte delgraf.
5. Slut proceduren, når du har alle hjørner med.